S-arrangements avec répétitions de tas II

Sylviane R. Schwer

S-arrangements avec répétitions de tas II

Sylviane R. Schwer
LIPN, UPRESA CNRS 7030, Université Paris 13, Institut Galilée
99, Avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse, France
fax : +33 (1) 48.26.07.12 tél. : +33 (1) 49.40.36.84
e-mail : schwer@lipn.univ-paris13.fr

20 mars 2008

Résumé

Nous étudions quelques familles d'objets isomorphes à l'ensemble des arrangements avec répétitions par des blocs de tas ou multi-ensembles puis nous introduisons une opération algébrique de composition fondée sur les S-mots.

mots clefs : langages formels, chemins dans des hypercubes, systèmes d'addition de vecteurs, ordres et préordres, intervalles généralisés.

1 Introduction

Nous avons introduit dans [8] la notion de S-arrangement avec répétitions de tas, ainsi que des outils de théorie des langages pour les traiter (S-alphabets, S-mots et S-langages) et fait quelques énumérations de ces objets. Dans cet article, nous montrons une correspondance naturelle de cette famille avec une famille particulière de langages associés à une certaine famille de systèmes d'addition de vecteurs, ou réseaux de Petri [6], lesquels constituent un outil largement répandu de modélisation des communications entre processus parallèles. Nous en déduisons une représentation géométrique à l'intérieur d'un n-hypercube de l'ensemble des S-arrangements avec répétitions de n tas, le cas binaire correspondant aux chemins de Delannoy [9, p.411]. Puis nous établissons des correspondances entre l'ensemble des S-arrangements avec répétitions de tas, les pré-ordres linéaires engendrés par des ordres totaux et l'ensemble des positions relatives d'intervalles généralisés [4]. De plus, nous introduisons une opération sur les S-langages qui généralise l'opération de composition de [4].

Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les notions et notations de la théorie des langages, à [6] pour celles concernant les systèmes d'addition de vecteurs et à [8] pour celles concernant les S-langages.

2 S-Systèmes d'Addition de Vecteurs et Représentations géométriques

2.1 S-Systèmes d'Addition de Vecteurs

Nous reprenons la définition de [7], puis nous introduisons la notion de S-VAS comme saturé d'un VAS sur le S-alphabet.

Définition 2.1 *Un n-système d'addition de vecteurs (n-VAS) est un triplet $\mathcal{A} = (X, \varphi, \vec{a})$ où X est alphabet, φ est un morphisme de monoïdes de $(X^*, ., \varepsilon)$ dans $(\mathbb{Z}^n, +, \vec{0})$ et $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbb{N}^n$.*

Nous associons au n-VAS $\mathcal{A} = (X, \varphi, \vec{a})$ sur X le langage $L_{\mathcal{A}}(\vec{a} \downarrow) = \{f \in X^* | \vec{a} + \varphi(f) = \vec{0}$ et $(\forall g \in X^*)((g$ est facteur gauche de $f) \Rightarrow (\vec{a} + \varphi(g) \geq \vec{0})\}$.

Définition 2.2 *Etant donné un n-VAS* $\mathcal{A} = (X, \varphi, \vec{a})$*, le* n-S-VAS associé *est le n-VAS* $\mathcal{A}^S$=$(\widehat{X}, \widehat{\varphi}, \vec{a})$ *où* $\widehat{\varphi}(s) = \sum_{x \in s} \varphi(x)$.

La construction d'un n-S-VAS fait qu'à chaque S-lettre de X est associé le vecteur traduisant la consommation d'une occurrence de chaque lettre présente dans la S-lettre. Pour consommer p_i occurrences de x_i, il faut utiliser exactement p_i S-lettres contenant x_i.

Soit alors $\mathbb{B}_n$= $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, soit $\nu_X = \{x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n}\}$ un n-tas sur l'alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Définissons le n-VAS $\mathcal{B}_n = (X, \beta, \vec{\nu}(X_n))$ en posant $\forall i \in [n]$, $\beta(x_i) = -e_i$, nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Il existe une correspondance naturelle entre* $L_{\mathcal{B}_n^S}(\vec{\nu}(X) \downarrow)$ *et* $\overline{\nabla}\nu_X$.

2.2 Représentation géométrique.

L'ensemble des vecteurs accessibles de $\mathcal{B}_n^S$ valant l'ensemble fini $Q = \{\vec{a} \in \mathbb{Z}^n | \vec{0} \leq \vec{a} \leq \vec{\nu}(X_n)\}$, le graphe de couverture de Karp et Miller [6] fournit directement un automate fini déterministe $G_{\mathcal{B}_n^S}(\vec{\nu}(X) \downarrow)$ générant le langage $L_{\mathcal{B}_n^S}(\vec{\nu}(X) \downarrow)$.
En suivant les notations de [1, p.71–75], $G_{\mathcal{B}_n^S}(\vec{\nu}(X) \downarrow) = \langle \widehat{X}, Q, \vec{\nu}(X_n), \{\vec{0}\}, \delta \rangle$ tel que $(q, x, q') \in \delta$ si et seulement si $q' = q + \widehat{\varphi}(x)$, $\forall q \in Q, \forall x \in \widehat{X}$.

Cet automate $G(\mathcal{B}_n^S)$ possède $\prod_{i=1}^n (p_i + 1)$ états. Dessinons chaque état à l'emplacement qui lui correspond dans l'espace $\mathbb{Z}^n$, inversons le sens des flèches des arcs de transitions et nous obtenons une généralisation à la dimension n des chemins de Delannoy [9] ou marches dans un $\mathbb{Z}$-treillis avec diagonales [5]. Il en résulte

Corollaire 2.1 *Soit* $\nu_X = \{x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n}\}$ *un n-tas, il existe une correspondance naturelle entre* $\overline{\nabla}\nu_X$ *et l'ensemble des marches aléatoires avec diagonales de* $\vec{0}$ *à* $\vec{\nu}(X_n)$ *dans* $\mathbb{Z}^n$ *avec progression positive unitaire ou nulle sur chacun des axes.*

3 Pré-ordres Linéaires et Intervalles Généralisés

3.1 Pré-ordres linéaires

Appelons *ensemble linéaire* un ensemble totalement ordonné. Rappelons qu'un *pré-ordre* sur un ensemble E une relation binaire réflexive et transitive et appelons *pré-ordre linéaire* un pré-ordre dont deux éléments quelconques sont toujours comparables. Nous nous intéressons au problème suivant : étant donnés n ensembles linéaires disjoints $(L_1, \ldots, L_n)$, L_i possédant p_i éléments, $\forall i \in [n]$, combien de pré-ordres linéaires génèrent-ils, c'est-à-dire, combien de pré-ordres linéaires préservant leurs ordres peut-on construire ? Notons $\mathfrak{P}(p_1, \ldots, p_n)$ cet ensemble et $P(p_1, \ldots, p_n)$ le cardinal de celui-ci. En associant à chaque chaîne L_i une couleur x_i et p_i boules, tout S-arrangement avec répétition du n-tas $\nu_X = \{x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n}\}$ représente un pré-ordre linéaire et tout pré-ordre linéaire obtenu à partir de $(L_1, \ldots, L_n)$ peut être décrit par un S-arrangement avec répétition de ν_X Il vient :

Proposition 3.1
(i)Il y a une correspondance naturelle entre $\mathfrak{P}(p_1, \ldots, p_n)$ *et* $\mathfrak{D}(p_1, \ldots, p_n)$
(ii)$P(p_1, \ldots, p_n) = D(p_1, \ldots, p_n)$

3.2 Positions relatives d'intervalles généralisés

Dans [4], est introduit l'ensemble de toutes les positions relatives possibles entre une chaîne de longueur p et une chaîne de longueur q d'un ensemble linéaire (assez grand pour contenir au moins $p+q$ éléments. Il y est prouvé que cet ensemble équivaut à un ensemble particulier de suites de $p+q$ entiers $\Pi(p,q)$. Nous généralisons le problème à n chaînes et montrons son équivalence avec les problèmes que nous étudions. Notons $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ l'ensemble de toutes les $(p_1,\ldots,p_n)$-positions.

Définition 3.1 *Etant donné* $(p_1,\ldots,p_n)\in \mathbb{P}^n$, $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ *est l'ensemble des fonctions* π *de* $\mathbb{P}^{[p_1+\cdots+p_n]}$ *satisfaisant :*
(i) $(\exists r \leq p_1+\cdots+p_n)$, $\pi[p_1+\cdots+p_n]=[r]$ *et*
(ii) $(\forall i \in\{\ 1,\ldots,\ n\ \})$, $\pi_{|[p_1+\cdots+p_{i-1}+1,p_1+\cdots+p_{i-1}+p_i]}$ *est strictement croissante.*

Ainsi $\Pi(2,2)=\{1234,1223,1324,1214,1323,1212,2314,2313,\ 1423,1312,2413,2312,3412\}$.

$\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ représente bien toutes les positions possibles entre n chaînes $(C_1,\ldots,C_n)$, C_i de taille p_i, d'un ensemble linéaire contenant au moins $p_1+\cdots+p_n$ éléments, car chaque suite est un codage associant au $j^{ème}$ élément de C_i, de rang k dans le préordre correspondant, le couple $(p_1+\cdots+p_{i-1}+j,k)$. Ainsi, un élément aparaît autant de fois que le nombre de chaînes auxquelles il appartient, ce qui revient bien à travailler sur des chaînes disjointes. Montrons alors la

Proposition 3.2
(i) Il existe une une correspondance naturelle entre $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ *et* $\mathfrak{P}(p_1,\ldots,p_n)$.
(ii) Le cardinal de $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ *est* $D(p_1,\ldots,p_n)$

preuve : (ii) découle de (i) que nous prouvons. Soit $\pi\in\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ et $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ une famille - prise comme n-alphabet - de n ensembles linéaires distincts $x_i = x_{i,1}\leq\ldots\leq x_{i,p_i}$ associée au n-tas $\nu_X=\{x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n}\}$. Associons à chaque intervalle $[p_1+\cdots+p_{i_1}+1,p_1+\cdots+p_i]$ l'ensemble linéaire $x_i=x_{i,1}\leq\ldots\leq x_{i,p_i}$ par l'isomorphisme d'ordre de $[n]$ sur $\bigcup_{i=1}^n x_i$ défini par : $\forall i\in[n]$, $\forall k\in[p_i]$, $\varphi(p_1+\cdots+p_{i_1}+k)=x_{i,k}$. Sur $\bigcup_{i=i}^n x_i$, la relation binaire définie par $x\preceq y$ si et seulement si $\pi(\varphi(x))\leq\pi(\varphi(y))$ est un pré-ordre linéaire, d'après les propriétés de π.
Réciproquement, soit un pré-ordre total $\preceq$ sur $\bigcup_{i=i}^n x_i$. Soit l'ordre total $\preceq_\equiv$ induit sur les classes d'équivalence. Notons $r_\preceq$ le nombre de ses classes.Construisons la fonction $\pi_\preceq$ de $[p_1+\ldots+p_n]$ sur $[r_\preceq]$ en posant $\forall i\in[n]$, $\forall k\in[p_i]$, $\pi_\preceq(p_1+\cdots+p_{i_1}+k)$ égale le nombre de classes inférieures ou égales à la classe de $x_{i,k}$. $\pi\in\ \Pi(p_1,\ldots,p_n)$. $\square$

Nous étudions par ailleurs les propriétés de treillis de ces ensembles.

3.3 Opérateurs de $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$

Dans [4], trois opérateurs *naturels* de $\Pi(p,q)$ sont introduits. La *transposition* qui change l'ordre de prise en compte des chaînes, la *symétrie* qui inverse l'ordre de l'ensemble linéaire et la *composition* qui permet, connaissant les positions relatives des chaînes C_1 et C_2 d'une part et C_2 et C_3 d'autre part, de calculer les positions possibles induites de C_1 et C_3. Nous étudions les opérations correspondantes dans le contexte des S-langages associés à $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$, soit $\overline{\nabla}\nu_X$, pour $\nu_X=\{x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n}\}$. La transposition est alors la fonction identité, la symétrie la fonction miroir [1, p.48]. La composition est l'opération fondamentale pour le raisonnement relationnel binaire. Par exemple si $\pi_1=1234\in\Pi(2,2)$ et $\pi_2=3412\in\Pi(2,2)$, alors $\pi_1\circ\pi_2=\Pi(2,2)$. Ce dont le lecteur se convaincra après traduction sous forme de mots : *aabb* et *ccbb* donne $(aa\overline{\nabla}cc)bb$, qui dit que si C_a et C_c sont avant C_b, sans information complémentaire, C_a et C_c peuvent se trouver dans n'importe quelle position relative.

Puisque nous avons la possibilité de traiter globalement les trois chaînes, nous proposons une opération paramétrée qui généralise la composition, nommée jointure.

Soit X un alphabet et $f\in\widehat{X}^*$, notons $X_f=\{x\in X|\|f\|_x\neq 0\}$. Soit $s,s'\subset X$, posons $s\Cap s'=s\cap s'$ si cette intersection est non vide, ε sinon. Cela nous permet de définir la projection

d'un S-mot f de $\widehat{X}^*$ sur un sous-alphabet Y de l'alphabet $\widehat{X}$ comme le S-mot obtenu à partir de f en supprimant toutes les occurrences n'appartenant pas à ce sous-alphabet ; on le note $f_{|Y}$:
$\forall f \in \widehat{X}^*, \forall Y \subset X,\ f_{|Y} = (f_1 \Cap Y)\dots(f_r \Cap Y)$ *si* $f = f_1 \dots f_r$ *avec* $f_i \in \widehat{X}$.
On peut alors poser :

Définition 3.2 *Soit* X,Y *et* Z *trois alphabets, et soit* $f \in \widehat{X}^*$, $g \in \widehat{Y}^*$. *On appelle* jointure sur l'alphabet Z, *et on note* $\underset{Z}{\bowtie}$ *l'ensemble*
$f \underset{Z}{\bowtie} g = \{h_{|Z} \mid h \in (\widehat{X \cup Y \cup Z})^*, h_{|X_f} = f \text{ et } h_{|Y_g} = g\}$.

On omet l'indice Z dans $f \underset{Z}{\bowtie} g$ quand il vaut $X \cup Y$.
Ainsi $acb \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right\} bab \bowtie ecde \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ b \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ b \end{smallmatrix} \right\} bb = [e\overline{\nabla} a]cde \left\{ \begin{smallmatrix} e \\ b \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \\ e \end{smallmatrix} \right\} bab.$

Cette définition s'étend aux langages : la jointure sur Z de L et L' est le langage $L \underset{Z}{\bowtie} L' = \{f \underset{Z}{\bowtie} g | f \in L, g \in L'\}$.

Proposition 3.3 *Soit* X, Y *et* Z *trois alphabets, et soit* $f \in \widehat{X}^*$, $g \in \widehat{Y}^*$.
(i) $f \underset{Z}{\bowtie} g \neq \emptyset$ *si et seulement si* $f_{|X \cap Y} = g_{|X \cap Y}$
(ii) Il existe une expression explicite (et régulière) de $f \underset{Z}{\bowtie} g$.

preuve : (i) découle des définitions, ainsi que (ii) dans le cas où $f_{|X \cap Y} \neq g_{|X \cap Y}$.
Supposons que $f_{|X \cap Y} = g_{|X \cap Y}$
$f = f_0 h_{f1} f_1 \dots h_{fk} f_k$ avec $f_i \in \widehat{X - Y}^*$ et $h_{fi} \in \widehat{X}$ et $h_{fi} \cap Y \neq \emptyset$,
$g = g_0 h_{g1} g_1 \dots h_{gl} g_l$ avec $g_i \in \widehat{Y - X}^*$ et $h_{gi} \in \widehat{Y}$ et $h_{gi} \cap X \neq \emptyset$.
Posons $h_i = h_{fi} \cup h_{gi}$ et $U = Z - (X \cup Y)$,
si $X \cup Y \subset Z$, alors $f \underset{Z}{\bowtie} g = [(f_0 \overline{\nabla} g_0).h_1.(f_1 \overline{\nabla} g_1)\dots h_k.(f_k \overline{\nabla} g_k)] \overline{\nabla} U^*$
sinon $f \underset{Z}{\bowtie} g = [(f_0 \overline{\nabla} g_0).h_1.(f_1 \overline{\nabla} g_1)\dots h_k.(f_k \overline{\nabla} g_k)]_{|Z}$.
Il est bien connu que l'entrelacs est une opération qui conserve la rationalité, et c'est également vrai pour le S-entrelacs. □

La composition au sens de [4] est la jointure sur $Z = X \Delta Y$ avec $card(X) = card(Y) = card(Z) = 2$.

Références

[1] J.-M. Autebert. *Langages Algébriques*. Masson, 1987

[2] J.-M. Autebert, M. Latapy, S. R. Schwer, Le treillis des chemins de Delannoy, *soumis à* Discrete Mathematics.

[3] D. Krob, M. Latapy, J.-C. Novelli, H. D. Phan et S. R. Schwer, Pseudo-permutations I: First Combinatorial and lattice Properties, 13^{th} International Conference on formal power series & algebraic combinatorics, 2001, May 20-26, Arizona State University.

[4] G. Ligozat. Intervalles généralisés I et II. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série A, Tome **310** (1990) 225-228 et 299–302

[5] L. Moser and H. S. Zayachkowski. Lattice paths with diagonal steps. Scripta Math. **26** (1963) 223–229

[6] J.L. Peterson. *Petri Net Theory and the modeling of Systems*. Prentice Hall, 1981

[7] S. R. Schwer. Fine covers of a VAS language. Theoretical Computer Science **95** (1992) 159–168

[8] S. R. Schwer. S-arrangements avec répétitions de tas I. *soumis à* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

[9] E. W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopaedia of Mathematics*. CRC Press, 2000.